

Date : / /

Subject:

$$v(x,t) = \cos 2t \cdot \sin x + \frac{1}{16} (1 - \cos 4t) \sin 2x$$

$$u(x,t) = \sin 2t + \cos 2t \cdot \sin x + \frac{1}{16} (1 - \cos 4t) \sin 2x$$

المحاضرة السابعة

مبدأ القيمة القصوى : إذا كانت الدالة $u(x,t)$ المعرفة بمنطقة

في المنطقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ تحققت معادلة التوصيل الحراري

المقابلة $u_t = \sigma^2 u_{xx}$ في المنطقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ فإن الدالة

$u(x,t)$ تصل إلى قيمتها القصوى أو الصغرى إما في المنطقة الابتدائية

$t=0$ وإما في نقطتي الحدود $x=0, x=l$

نظرية التوصيلية : سوف نثبت وصداية الحل لمعادلة التوصيل

الحراري بالاعتماد على مبدأ القيمة القصوى.

نظرية : إذا كانت الدالتان $u_1(x,t), u_2(x,t)$ المعرفتان

والمصلتان في المنطقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ وتحققان معادلة

التوصيل الحراري

$$u_t = \sigma^2 u_{xx} + f(x,t) \quad (1)$$

وتحققان الشروط المحددة الابتدائية فيها

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \phi(x)$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = \mu_1(t)$$

$$u_1(l,t) = u_2(l,t) = \mu_2(t)$$

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \text{ أي المعادلة حل وصيد}$$

البرهان : البرهان هذه النظرية تدرج الدالة

$$v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t) \quad (3)$$

بما أن الدالتان $u_1(x,t), u_2(x,t)$ متصلةا متصلةا في المنطقة

Date : / /

Subject:

١. $0 < x < l$ $0 < t < T$ عندئذ تكون الدالة $u(x, t)$ في النطاق الفوق تكون دالة مستمرة ومتمصلة.

وبما أن $u(x, t)$ هي دالة الفرق بين صليين للمعادلة التوصيل الحراري في المنطقة $0 < x < l$ $0 < t < T$

وبالتالي فهي تحقق معادلة التوصيل الحراري المتجانسة وذلك لأن:

$$u_1(x, t) \text{ حل للمعادلة المعطاة (1) هذا يعني أن هذا الحل يحقق المعادلة}$$

$$u_1, t = a^2 u_{1, xx} + f(x, t)$$

وبما أن $u_2(x, t)$ حل للمعادلة (2) فهو يحققها

$$u_{2, t} = a^2 u_{2, xx} + f(x, t)$$

$$(u_1 - u_2), t = a^2 (u_{1, xx} - u_{2, xx})$$

وبما أننا نتعامل مع العلاقة (3) فنحصل على:

$$v, t = a^2 v_{xx}$$

وبالتالي فإن مبدأ القيمة القصوى ينطبق على هذه الدالة أي أنها يقل

إلى قيمتها القصوى أو الصغرى عند $x=0$ أو $x=l$ أو $t=0$ أو $t=T$

من العلاقات ② و ③ نجد:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) - u(x, 0) &= v(x, 0) = 0 \\ u(0, t) - u(0, t) &= v(0, t) = 0 \\ u(l, t) - u(l, t) &= v(l, t) = 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

وفدعنا نبدأ القيمة القصوى والعلاقات (4) نجد أن

$$v(x, t) = 0$$

$$u_2(x, t) - u_1(x, t) = 0$$

وبالتالي فإن

$$u_2 = u_1 \text{ للمعادلة حل واحد}$$

Date : / /

Subject:

نظرية (2) بفرض أن $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ حلان للمعادلة التفاضلية الحرارية وبفرض أن هذان الحلان يحققان الشروط الآتية :

$$u_1 = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

$$1) - u_1(x, 0) \leq u_2(x, 0)$$

$$2) - u_1(0, t) \leq u_2(0, t)$$

$$3) - u_1(l, t) \leq u_2(l, t)$$

عندئذ استبان أن $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$ لجميع قيم $0 < x < l$ و $0 < t < T$.

البرهان : نحلل الزم $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$

عندئذ الدالة $v(x, t)$ تحقّق الشروط التي استبانها عند الفتح، لفظاً أي أن الدالة $v(x, t)$ تحقّق الدالة المعطاة وهي دالة مستمرة ومحددة. وأيضاً من الشروط المعطاة في هذه النظرية نجد أن :

$$v(x, 0) \geq 0$$

$$v(0, t) \geq 0$$

$$v(l, t) \geq 0$$

وبالتالي فإن $v(x, t) \geq 0$ في المنطقة $0 < x < l$ و $0 < t < T$.

والإيمان الدالة $v(x, t)$ كان سيصبح لها قيمة عظمى صفرية سالبة في المنطقة $0 < x < l$ و $0 < t < T$ وهذا غير صحيح.

Date : / /

Subject:

طريقة فصل المتغيرات (طريقة فورية)

دراسة معادلة التوصيل الحراري المتجانسة

أوجد حل معادلة التوصيل الحراري المتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T \quad (1)$$

والحتم للشرط الابتدائي (2) $u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l$

والشرط الحدية المتجانسة (3) $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$

الحل سوف نبحث عن حل المعادلة (1) الذي لا يسوي الصفر بالتطابق وكيفية

الشرط الحدية المتجانسة (3) والتي يمكن التعبير عنها بـ

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (4)$$

علماً أن X تابعة لـ x فقط و T تابعة لـ t فقط

نستف العلاقة (4) مرة بالـ t ونشت بالـ x ونقسم الطرفين بالتدوير

$$u_t = X T' \quad \text{بالملاقة (4)}$$

$$u_x = X' T$$

$$u_{xx} = X'' T$$

$$X T' = a^2 X'' T$$

نقسم على $a^2 \neq 0$ فنصل إلى

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda \quad ; \quad \lambda > 0$$

علماً أن λ مقدار ثابت

حيث فصل على صطلين غير متافعة سوف نأخذ $\lambda > 0$

فناخذ العلاقة فصل على

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (5)$$

$$T' + \lambda a^2 T = 0 \quad (6)$$

من الشروط الحدية (3) والعلاقة (4) فصل على

Date : / /

Subject:

$$X(0) = X(l) = 0 \quad (7)$$

ومن ذلك القيم الذاتية $X(x)$ مطابقة مسألة القيم الذاتية التالية

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) &= X(l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\rho^2 = \lambda = 0 \Rightarrow \rho^2 - \lambda = \lambda i^2 \rightarrow \rho = \pm \sqrt{\lambda} i$$

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

هذا الشرط اطرافته حصل على:

$$0 = C_1$$

$$0 = C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l$$

$$\Rightarrow C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda} l = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}; (n, 1, 2, \dots)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2$$

هذه القيم الذاتية تقابلها حلول غير تافهة للمعادلة (5)

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$$

ومن أجل القيم الذاتية λ_n نجد حل المعادلة (6)

$$T' + \lambda a^2 T = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} = - \lambda a^2 dt$$

$$\ln \frac{T_n}{C_n} = - \lambda_n a^2 t +$$

$$T_n = C_n e^{-\lambda_n a^2 t} \Rightarrow T_n = C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t}$$

الاستناد إلى العلاقة (4) نحصل على الحل الخاصية بـ $u(x, t)$

$$u(x, t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x; (n=1, 2, \dots)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (9)$$

Date : / /

Subject:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi$$

ملاحظة: يمكن كتابة الحل بالشكل التالي:

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t) G(\xi) d\xi$$

نظرياً

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi$$

هذه الدالة تمثل دالة التأثير الحراري لمصدر حراري لحظي نقطة أو دالة المصدر النقطي.

ملاحظة: إذا اُضيفت الشروط الحدية على الشكل التالي:

$$u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0$$

عندها يحل الحل العام للمألة في هذه الحالة بشكل كل $n = \frac{2n+1}{2}$

والدالة تبدأ من $n=0$ وبشكل كل \sin و \cos

تطبيق: أوجد حل المادّة $0 < x < 1, 0 < t < \tau$ $u_t = 0, u_{xx} = 0$

في المنطقة $(0 < x < 1, 0 < t < \tau)$ والذي يحقق الشروط الحدية

$$u(0,t) = \alpha_2, u(1,t) = 0 \quad (3)$$

والذي يحقق الشروط الابتدائية:

$$u(x,0) = G(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

الحل: حل المسألة المطّاة بصفة بالحدس الآتي

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l$$

Date : / /

Subject:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n \pi x$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(\xi) \sin \frac{n \pi}{l} \xi d\xi = 2 \int_0^1 G(\xi) \sin n \pi \xi d\xi$$

$$= u \int_0^{1/2} \xi \sin n \pi \xi d\xi + u \int_{1/2}^1 (1-\xi) \sin n \pi \xi d\xi$$

$$I_1 = \int_0^{1/2} \xi \sin n \pi \xi d\xi = -\frac{1}{n \pi} \cos n \pi \xi \int_0^{1/2} + \frac{1}{n \pi}$$

$$\int_0^{1/2} \cos n \pi \xi d\xi = -\frac{1}{2n \pi} \cos \frac{n \pi}{2} + \frac{1}{(n \pi)^2} \sin n \pi \xi \Big|_0^{1/2}$$

$$I_1 = -\frac{1}{2n \pi} \cos \frac{n \pi}{2} + \frac{1}{(n \pi)^2} \sin \frac{n \pi}{2}$$

$$I_2 = -\frac{1}{n \pi} (1-\xi) \cos n \pi \xi \Big|_{1/2}^1 - \frac{1}{n \pi} \int_{1/2}^1 \cos n \pi \xi d\xi$$

$$= \frac{1}{2n \pi} \cos \frac{n \pi}{2} - \frac{1}{(n \pi)^2} \sin n \pi \xi \Big|_{1/2}^1$$

$$= \frac{1}{2n \pi} \cos \frac{n \pi}{2} + \frac{1}{(n \pi)^2} \sin \frac{n \pi}{2}$$

$$C_n = u \left[\frac{2}{(n \pi)^2} \sin \frac{n \pi}{2} \right]$$

$$C_n = \frac{8}{(n \pi)^2} \sin \frac{n \pi}{2}$$

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-(n \pi)^2 t} \sin \frac{n \pi}{2} \sin n \pi x$$

Date : / /

Subject:

معادلة التوصيل الحراري غير المتجانسة مع شروط حدية هوموجينية

أوجد حل المعادلة: $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ (1)

والمحقق للشروط الابتدائية (2) $u(x, 0) = g(x)$

والشروط الحدية المتجانسة (3) $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0; t > 0$

الحل: لحل هذه المسألة نجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة، والمحقق

لشروط الابتدائية الصفرية $u(x, 0) = 0$

ثم نضيف إلى هذا الحل حل المعادلة المتجانسة

سوف نحصل على الحل الخاص لكل سلسلة فورييه بالدوال الذاتية

سوف نحصل على الحل الخاص فكل $\sin \frac{n\pi}{l} x$

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ (5)

علماً أن $u_x(t)$ هي عبارة عن الدالة المجهولة وتابعة لـ t فقط

معتبرين عند ذلك بارامترين و $u_x(t)$ دوال في x

وطلب تعيينها فذاً تم لتعيين الدالة $u(x, t)$ يجب تعيين الدوال $u_x(t)$

من أجل ذلك فكل $f(x, t)$ شكل سلسلة

$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$

$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi$

نطبق العلاقة (5) مرة واحدة بالسلسلة لـ t ومرتين بالسلسلة لـ x ونبدل في (5)

$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$

$u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right) u_x(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$

$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 u_x(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$

$\sum_{n=1}^{\infty} [u'_n(t) - (a n \pi)^2 u_x(t)] \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$

Date : / /

Subject:

$$u_x'(t) = \left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 u_x(t) = f_n(t) \quad (7)$$

وبالمثل باستخدام الشرط الابتدائي للمعادلة $u(x, t)$ في العلاقة (5) و (6)

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_x(0) \sin \frac{n\pi}{e} x \Rightarrow u_x(0) = 0 \quad (8)$$

حل المعادلة (7) و (8)

المعادلة (7) هي دالة تفاضلية خطية تابعة لمجهول u_x والمثل

$$u(t) = e^{\int \left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 dt} = e^{\left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 t}$$

فنضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل هذا المفضل في معادلة تابعة نحصل

بالشكل التالي لنبدل في المعادلة المعطاة :

$$\left[e^{\left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 t} u_x(t) \right]' = e^{\left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 t} f_n(t)$$

بالمكافئة فنحصل على :

$$e^{\left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 t} u_x(t) = \int_0^t e^{\left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 \tau} f_n(\tau) d\tau + c$$

بالاعتناء بالعلاقة (8) نجد أن $c = 0$

$$u_x(t) = \int_0^t e^{\left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

وبالتالي بعد التبديل في العلاقة (5) فنحصل على الحل الخاص المطلوب

وأخيراً حل المعادلة يعطينا بالعلاقة التالية :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{e} x +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{e} x$$

$$c_n = \frac{2}{e} \int_0^e \phi(\xi) \sin \frac{n\pi}{e} \xi d\xi \quad \text{حيث أن :}$$

$$u_n(t) = \int_0^t e^{\left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

Date : / /

Subject:

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, t) \sin \frac{n\pi \xi}{\pi} d\xi$$

ملاحظة هامة: عند ما نقول لنا أوجد حل المعادلة والمحقق للشروط الابتدائية $u(x, 0) = \phi(x)$ والشروط الحدية الصغرى فيكون المطلوب منا الحل الخاص فقط.

المسألة الحديثة العامة للمعادلة التوصيل الحراري:

أوجد حل المعادلة:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية (2) $u(x, 0) = \phi(x)$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \quad (3)$$

الحل: سوف نبحث عن حل المعادلة من الشكل

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t) \quad (4)$$

حيث $v(x, t)$ دالة مجهولة صديقة والتي تمثل الاختلاف عن دالة فاصلة $U(x, t)$.

نشتق (4) مرة بالسبة لـ t ومرة بالسبة لـ x :

$$u_t = U_t(x, t) + v_t(x, t)$$

$$u_x = U_x(x, t) + v_x(x, t)$$

$$u_{xx} = U_{xx}(x, t) + v_{xx}(x, t)$$

$$v_t = a^2 u_{xx} + (a^2 U_{xx} - U_t + f(x, t)) \quad \text{نقوم في ①}$$

$$v_t = a^2 u_{xx} + \bar{f}(x, t) \quad (5)$$

$$\bar{f}(x, t) = a^2 U_{xx} - U_t + f(x, t)$$

والدالة $v(x, t)$ تحقق الشروط الابتدائية (2) و (3) و (4) صحيحة.

Date : / /

Subject:

$$v(x, 0) = Q(x) \Rightarrow u(x, 0) = \bar{Q}(x) \quad (6)$$

وأيضاً تحقق الشروط الحدية الجديدة التالية في (6) و (7).

$$\begin{aligned} * \mu_1(t) = u(0, t) + v(0, t) &\Rightarrow v(0, t) = \mu_1(t) - u(0, t) \\ &= \bar{\mu}_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \mu_2(t) = u(l, t) + v(l, t) &\Rightarrow v(l, t) = \mu_2(t) - u(l, t) \\ &= \bar{\mu}_2(t) \end{aligned}$$

كأن حصل على شروط حدية صفرية تحت الدالة $u(x, t)$ المتكاملة.

$$u(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} (\mu_2(t) - \mu_1(t))$$

$$\Leftrightarrow \bar{\mu}_1(t) = \bar{\mu}_2(t) = 0$$

$$\Rightarrow v(0, t) = 0, v(l, t) = 0 \quad (7)$$

وبالتالي المألة الحدية المعطاة تحولت إلى مسألة حدية صفرية جديدة، هي (6) و (7).

وبشروط حدية صفرية وبالتالي حل المألة هو عبارة عن

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} v_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{Q}(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi$$

$$v_x(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{Q}(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi$$

Date : / /

Subject:

مفوض من [٤] مفصل في الحل العام المطلوب :

ملاحظة : إذا أعطيت الشروط الحدية في الشكل الآتي :

$$u_x(0, t) = u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t) \quad \text{عندئذ نختار}$$

وفي الدساتير السابقة نبدل كل n بـ $\frac{2n+1}{2}$ والـ ١

تبدأ من الصفر وتبدل كل \sin بـ \cos .